Πρόταση: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία θετικών φυσικών

(i) Αν $\sqrt[n]{a_n}\to \ell$ με $\ell<1$ τότε $a_n\to 0$

(ii) Αν $\sqrt[n]{a_n}\to \ell$ με $\ell>1$ τότε $a_n\to +\infty$.

Απόδειξη:

(i) Επιλέγουμε λ με $\ell<\lambda<1$ και θέτουμε $\varepsilon=\lambda-\ell>0$

Εφόσον $\sqrt[n]{a_n}\to \ell$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $(\ell-\varepsilon)<\sqrt[n]{a_n}<\ell+\varepsilon=\lambda$ $\forall n\geq n_0$

Έτσι $\sqrt[n]{a_n}<\lambda$ $\forall n\geq n_0 \Rightarrow a_n<\lambda^n$ $\forall n\geq n_0$.

Έτσι $\underset{\downarrow \atop 0}{0}<a_n<\underset{\downarrow \atop 0}{\lambda^n}$ $\forall n\geq n_0$. Άρα, από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών έχουμε $a_n\to 0$.

(ii) Επιλέγουμε λ με $1<\lambda<\ell$ και θέτουμε $\varepsilon=\ell-\lambda>0$

Εφόσον $\sqrt[n]{a_n}\to \ell$ $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\lambda=\ell-\varepsilon<\sqrt[n]{a_n}<\ell+\varepsilon$ $\forall n\geq n_0$

Έτσι, $a_n>\lambda^n$ $\forall n\geq n_0$. Εφόσον $\lambda^n\to+\infty$ συμπεραίνουμε ότι $a_n\to+\infty$.

Σημείωση: Δε μπορεί να βγεί συμπέρασμα για το όριο της a_n όταν $\sqrt[n]{a_n}\to 1$.

Παράδειγμα: $a_n=\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$

$\sqrt[n]{a_n}=\frac{3}{2}-\frac{1}{\sqrt{n}}\to\frac{3}{2}$ με $\frac{3}{2}>1$. Άρα, $a_n\to+\infty$.

Πρόταση: Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες ώστε:

(i) $a_n\leq a_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (δηλαδή a_n αύξουσα)

(ii) $b_{n+1}\leq b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (δηλαδή b_n φθίνουσα)

(iii) $a_n\leq b_n$ $\forall n\in\mathbb{N}$

(iv) $b_n-a_n\to 0$ [ή $\frac{b_n}{a_n}\to 1$ αν οι ακολουθίες έχουν θετικούς όρους].

Τότε, οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

Απόδειξη

$\forall n\in\mathbb{N}$ ισχύει $a_n\overset{(iii)}{\leq} b_n\overset{(ii)}{\leq} b_1$ έτσι ο b_1 είναι άνω φράγμα της a_n.

Η ακολουθία a_n είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από τον b_1, συνεπώς συγκλίνουσα. Θέτουμε $\xi=\lim a_n$.

Ομοίως, η b_n είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη από τον a_1, συνεπώς συγκλίνουσα. Θέτουμε $\eta=\lim b_n$.

Scanned by CamScanner

$\left.\begin{matrix} a_n \to \xi \\ b_n \to \eta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_n - b_n \to \xi - \eta \\ \text{όμως } a_n - b_n \to 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Από μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας έχω: $\xi - \eta = 0 \Rightarrow \xi = \eta$.

[Αν $\frac{b_n}{a_n} \to 1$ → Από μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας $\frac{\eta}{\xi} = 1 \Rightarrow \eta = \xi$

Τότε, $\left.\begin{matrix} b_n \to \eta \\ a_n \to \xi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \to \frac{\eta}{\xi}$]

Αρχή των Κιβωτισμένων Διαστημάτων

Αν $[a_n, b_n]$ είναι μια ακολουθία κλειστών διαστημάτων

ώστε $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

και $b_n - a_n \to 0$

Τότε, $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\xi\}$ για κάποιο $\xi \in \mathbb{R}$

[Χωρίς την υπόθεση $b_n - a_n \to 0$ προκύπτει
$\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = [\xi, \eta]$ όπου $\xi = \lim a_n$, $\eta = \lim b_n$]

• Η ακολουθία $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ θα δείξουμε ότι συγκλίνει.

Λύση: Θέτουμε $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Ισχυρισμός: $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right)}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2+2n+1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) \underset{\substack{\text{Ανισότητα}\\\text{Bernoulli}}}{\geq}$$

$$\left(1 - n \cdot \frac{1}{n^2+2n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \left(\frac{n^2+n+1}{n^2+2n+1}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{n^3+3n^2+3n+2}{n^3+3n^2+3n+1} > 1$$

Άρα, $a_n < a_{n+1}$.

Ισχυρισμός: $b_{n+1} < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n^2+2n}\right)^{n+1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \underset{\substack{\text{Ανισότητα}\\\text{Bernoulli}}}{\geq}$$

$$\left(1 + (n+1)\frac{1}{n^2+2n}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \left(\frac{n^2+2n+n+1}{n^2+2n}\right)\left(\frac{n+1}{n+2}\right) = \frac{n^3+4n^2+4n+1}{n^3+4n^2+4n} > 1$$

Άρα, $b_{n+1} < b_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Scanned by CamScanner

Προφανώς, $a_n < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$, ενώ $\frac{b_n}{a_n} = 1 - \frac{1}{n} \to 1$

Επομένως, οι $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνουν στον ίδιο πραγματικό αριθμό.

<u>Ορισμός:</u> $e = \lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

<u>Παρατήρηση:</u> $a_n < e < b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\underset{2}{a_1} < e < b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 < 3$

Αποδεικνύεται ότι $e \simeq 2,718281828\ldots$

Λύσεις των Ασκήσεων

1) $a_n = \sqrt[n]{3^n+5^n+9^n}$, $b_n = \sqrt{3^n+5^n+9^n}$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 9}}{9 = \sqrt[n]{9^n}} < a_n < \sqrt[n]{9^n+9^n+9^n} = \sqrt[n]{3\cdot 9^n} = \underbrace{\sqrt[n]{3}\cdot 9}_{\downarrow\, 9}$$

Από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών προκύπτει $a_n \to 9$

$b_n > \sqrt{9^n} = 3^n$ $\quad 3^n \to +\infty$. Άρα, $b_n \to +\infty$

2) $x_n = \dfrac{3^n+7^n}{7^n+8^n} = \dfrac{\left(\frac{3}{8}\right)^n + \left(\frac{7}{8}\right)^n}{\left(\frac{7}{8}\right)^n + 1}$ $\qquad x_n \to \dfrac{0+0}{0+1} = 0.$

3) $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{5x_n}$

$x_2 = \sqrt{5x_1} = \sqrt{50} < 8 < 10 = x_1$

<u>Ισχυρισμός:</u> $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

<u>1º επαγωγικό βήμα:</u> $x_2 < x_1$ το είδαμε παραπάνω.

<u>γενικό επαγωγικό βήμα:</u> Έστω $x_{n+1} < x_n \Rightarrow 5x_{n+1} < 5x_n \Rightarrow \sqrt{5x_{n+1}} < \sqrt{5x_n} \Rightarrow$

$x_{n+2} < x_{n+2}$

$x_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (να προηγηθεί)

$x_1 = 10 \geq 0$

$x_n \geq 0 \Rightarrow 5x_n \geq 0 \Rightarrow \sqrt{5x_n} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq 0$

<u>Συμπέρασμα:</u> Εφόσον (x_n) φθίνουσα και κάτω φραγμένη, θα είναι συγκλίνουσα.

Θέτουμε $x = \lim x_n$. $\quad x_n \to x \Rightarrow x_{n+1} \to x$.

$x_n \to x \Rightarrow 5x_n \to 5x \Rightarrow \sqrt{5x_n} = x_{n+1} \to \sqrt{5x}$

Από μοναδικότητα του ορίου ακολουθίας $x = \sqrt{5x} \Rightarrow x^2 = 5x \Rightarrow x^2 - 5x = 0 \overset{x\geq 0}{\Rightarrow} x = 5$ ή $x = 0$

Δείχνουμε ότι $3 \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Scanned by CamScanner

1º επαγωγικό βήμα: $x_1 = 10 \geq 3$

γενικό επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι $x_n \geq 3 \Rightarrow 5x_n \geq 15 \Rightarrow \sqrt{5x_n} \geq \sqrt{15} \Rightarrow x_{n+1} \geq \sqrt{15}$

όπου $\sqrt{15} > \sqrt{9} = 3$. Επομένως, $x_n \geq 3 \ \forall n \in \mathbb{N}$

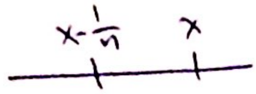
Αφού $x_n \to x$ προκύπτει $x \geq 3$. Επομένως, $x = 5$. Δηλαδή, $x_n \to 5$.

5) Έστω $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει (a_n) ακολουθία ρητών με $a_n \to x$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει (b_n) γνησίως αύξουσα ακολουθία ρητών με $b_n \to x$.

α) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad x - \frac{1}{n} < x$



Άρα, από πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς, υπάρχει $a_n \in \mathbb{Q}$ με $x - \frac{1}{n} < a_n < x$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Επίσης, } \lim\left(x - \frac{1}{n}\right) = x \\ \lim x = x \end{array}\right\}$$

Άρα, από θεώρημα ισοσυγκλινουσών ακολουθιών συμπεραίνουμε $\lim a_n = x$.

β) Με επαγωγή ορίζουμε τους όρους της b_n, ώστε $x - \frac{1}{n} < b_n < x$, $b_n < b_{n+1}$ και $b_n \in \mathbb{Q}$

1º επαγωγικό βήμα: Επιλέγουμε $b_1 \in \mathbb{Q}$ με $x - 1 < b_1 < x$ για $n = 1$.

γενικό επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι έχουν οριστεί οι $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{Q}$

ώστε $x - \frac{1}{k} < b_n < x \quad k = 1, \dots, n$

$b_1 < b_2 < \dots < b_n$.

Επίσης $\max\{b_n, x - \frac{1}{n}\} < x$

Από την πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς $\exists\, b_{n+1} \in \mathbb{Q}$

ώστε $\max\{b_n, x - \frac{1}{n}\} < b_{n+1} < x$

Η επαγωγική κατασκευή της b_n είναι πλήρης και έχουμε αποδείξει ότι

$b_n \in \mathbb{Q} \ \forall n \in \mathbb{N}$

$b_n < b_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x - \frac{1}{n}} < b_n < \underset{\substack{\downarrow \\ x}}{x}$$

Επομένως, $b_n \to x$.

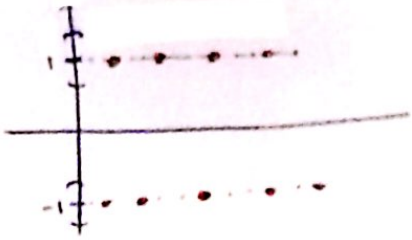
Scanned by CamScanner

• Θεωρούμε την ακολουθία $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $a_n=(-1)^n$

Θα δείξουμε ότι δεν είναι συγκλίνουσα με απαγωγή σε άτοπο.

Υποθέτουμε ότι $\exists a\in\mathbb{R}$ με $a_n\to a$.

Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $\varepsilon=\frac{1}{2}$



συμπεραίνουμε ότι $\exists n_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\forall n\in\mathbb{N}$

με $n\geq n_0$ ισχύει $|a_n-a|<\frac{1}{2}$.

$$|(-1)^n-a|<\frac{1}{2}$$

• Επιλέγοντας έναν περιττό αριθμό n_1 με $n_1\geq n_0$

προκύπτει $|(-1)-a|<\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{2}<-1-a<\frac{1}{2} \Rightarrow a<-\frac{1}{2}$ (I)

• Επιλέγοντας έναν άρτιο αριθμό n_2 με $n_2\geq n_0$

προκύπτει $|1-a|<\frac{1}{2}$ $\quad -\frac{1}{2}<1-a<\frac{1}{2} \Rightarrow a>\frac{1}{2}$ (II)

$\overset{(I),(II)}{\Longrightarrow}$ Άτοπο. Άρα, η (a_n) δεν συγκλίνει.

ΥΠΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ

Έστω $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \dots$

Επιλέγοντας $k_1<k_2<k_3<\dots$ φυσικούς αριθμούς,

Μπορούμε να ορίσουμε μια νέα ακολουθία $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $b_n=a_{k_n}$.

<u>Ορισμός</u>: Αν $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία και $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ μια γνησίως αύξουσα ακολουθία, ορίζεται μια νέα ακολουθία $b_n=a_{k_n}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

Μια ακολουθία που ορίζεται με αυτό τον τρόπο λέγεται <u>υπακολουθία</u> της $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Παράδειγμα</u>

α) Αν πάρουμε $k_n=2n$ προκύπτει η υπακολουθία (a_{2n}) των άρτιων όρων της (a_n).

β) Αν πάρουμε $k_n=2n-1$ προκύπτει η υπακολουθία (a_{2n-1}) των περιττών όρων της (a_n).

<u>Παρατήρηση</u>: Αν $k:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ γνησίως αύξουσα (ορισμός υπακολουθίας) τότε $k_n\geq n$ $\forall n$

<u>Απόδειξη</u> Με επαγωγή

<u>1ο επαγωγικό βήμα</u>: $k_1\in\mathbb{N}$ άρα $k_1\geq 1$

<u>γενικό επαγωγικό βήμα</u>: Υποθέτουμε $k_n\geq n$. Ισχύουν $k_{n+1}>k_n \Rightarrow k_{n+1}\geq k_n+1\geq n+1$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

Scanned by CamScanner